Variablen und Parameter in LISREL

1 Konfirmatorische Faktorenanalyse: Pfaddiagramm

Dieses Diagramm stellt den denkbar einfachsten Fall einer konfirmatorischen Faktorenanalyse dar. Empirisch sind Modelle mit so wenigen Variablen nur unter bestimmten Bedingungen identifiziert und analysierbar.

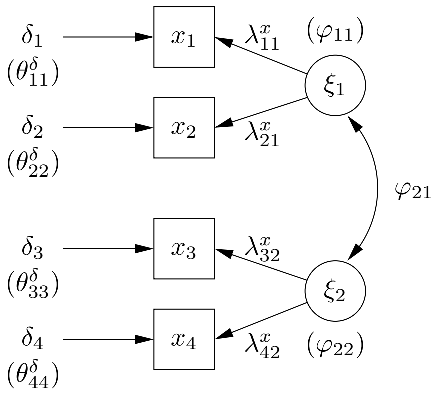

Abbildung 1. Beispiel-Pfaddiagramm einer konfirmatorischen Faktorenanalyse mit zwei latenten Variablen (Konstrukten) ξ_1, ξ_2, operationalisiert durch die manifesten Variablen (Indikatorvariablen) x_1, x_2 bzw. x_3, x_4, sowie den im Modell enthaltenen Parametern. Varianzen als Modellparameter sind bei den jeweiligen Variablen in Klammern dargestellt.

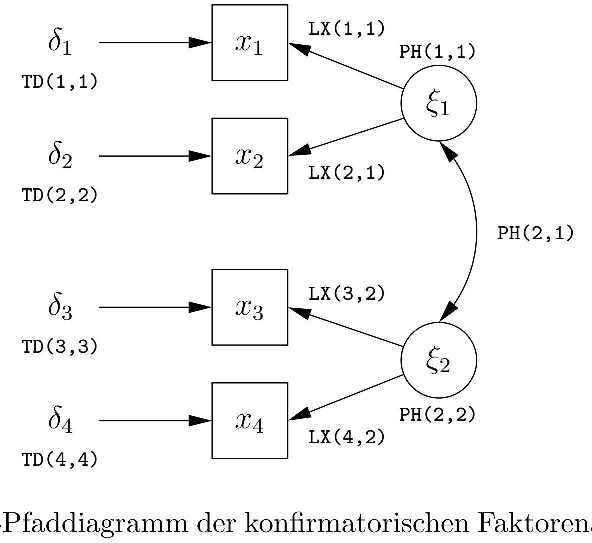

Abbildung 2. Beispiel-Pfaddiagramm der konfirmatorischen Faktorenanalyse aus Abbildung 1. Die im Modell enthaltenen Parameter sind mit ihren LISREL-Bezeichnungen dargestellt.

2 Konfirmatorische Faktorenanalyse: Parametermatrizen

Die Matrizen entsprechen dem Pfaddiagramm auf der vorherigen Seite.
Notation: links in griechischen Buchstaben, rechts in LISREL-Syntax

Faktorladungsmatrix (Ladungen der Indikatorvariablen x auf den Konstrukten ξ)

$$\Lambda^x = \begin{pmatrix} \lambda^x_{11} = 1 & 0 \\ \lambda^x_{21} & 0 \\ 0 & \lambda^x_{32} = 1 \\ 0 & \lambda^x_{42} \end{pmatrix} \qquad \texttt{LX} = \begin{pmatrix} \texttt{LX}(1,1) = 1 & 0 \\ \texttt{LX}(2,1) & 0 \\ 0 & \texttt{LX}(3,2) = 1 \\ 0 & \texttt{LX}(4,2) \end{pmatrix}$$

Fehler(ko)varianzmatrix (Varianzen und evtl. Kovarianzen der Meßfehlervariablen δ)

$$\Theta^\delta = \begin{pmatrix} \theta^\delta_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta^\delta_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta^\delta_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta^\delta_{44} \end{pmatrix} \qquad \texttt{TD} = \begin{pmatrix} \texttt{TD}(1,1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \texttt{TD}(2,2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \texttt{TD}(3,3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \texttt{TD}(4,4) \end{pmatrix}$$

Faktor(ko)varianzmatrix (Varianzen und Kovarianzen der Faktoren ξ)

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \qquad \texttt{PH} = \begin{pmatrix} \texttt{PH}(1,1) & \texttt{PH}(1,2) \\ \texttt{PH}(2,1) & \texttt{PH}(2,2) \end{pmatrix}$$

Skalierung

Das Setzen von jeweils einer Faktorladung pro Konstrukt auf 1 dient der *Skalierung*, d. h. der Festlegung der Varianzen der Konstrukte. In der Praxis sollten hierfür möglichst reliable und valide Indikatorvariablen verwendet werden (was nicht unbedingt die jeweils erste zu sein braucht).

Aufbau der Matrizen

(1) In Matrizen, die Effekte zwischen Variablen darstellen, entsprechen die Spalten den Variablen, von denen Effekte ausgehen (abgehende Pfeile im Pfaddiagramm), die Zeilen entsprechen den Variablen, auf die Effekte wirken (ankommende Pfeile im Pfaddiagramm). Beispiel:

(2) In Kovarianzmatrizen entsprechen die Zeilen und Spalten den jeweiligen Variablen. Diese Matrizen sind grundsätzlich symmetrisch. Beispiel:

$$\texttt{LX} = \Lambda^x = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda^x_{11} & 0 \\ \lambda^x_{21} & 0 \\ 0 & \lambda^x_{32} \\ 0 & \lambda^x_{42} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \texttt{PH} = \Phi = \begin{array}{c} \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

3 Vollständiges Strukturgleichungsmodell: Pfaddiagramm

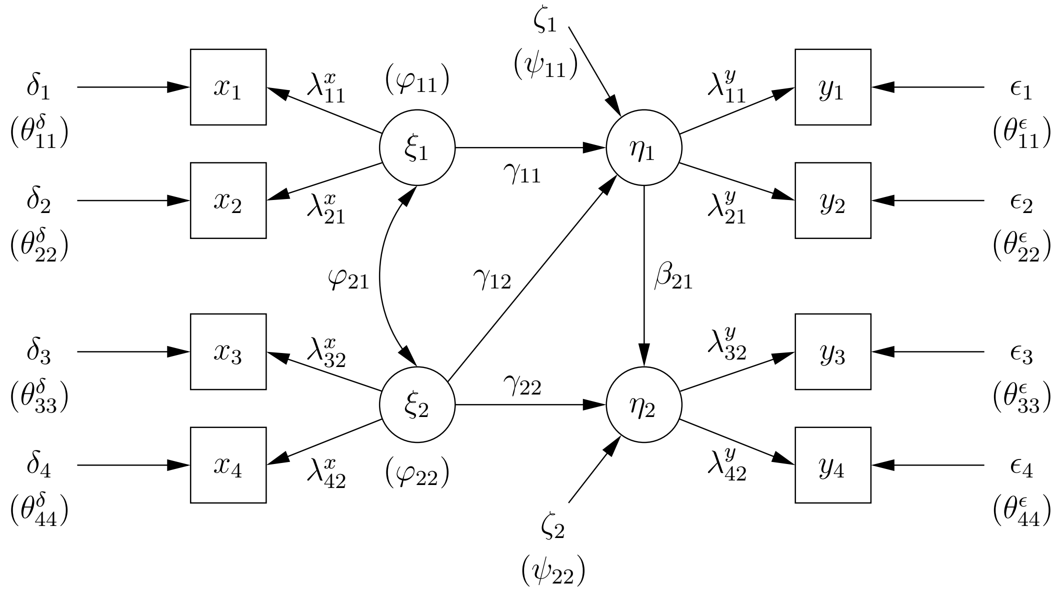

Abbildung 3. Beispiel-Pfaddiagramm eines Strukturgleichungsmodells mit zwei latenten Prädiktorvariablen ξ_1, ξ_2 (operationalisiert durch die manifesten Variablen x_1, x_2 bzw. x_3, x_4), einer Mediatorvariablen η_1 (operationalisiert durch y_1, y_2) und einer Kriteriumsvariablen η_2 (operationalisiert durch y_3, y_4) sowie den im Modell enthaltenen Parametern. Varianzen als Modellparameter sind bei den jeweiligen Variablen in Klammern dargestellt.

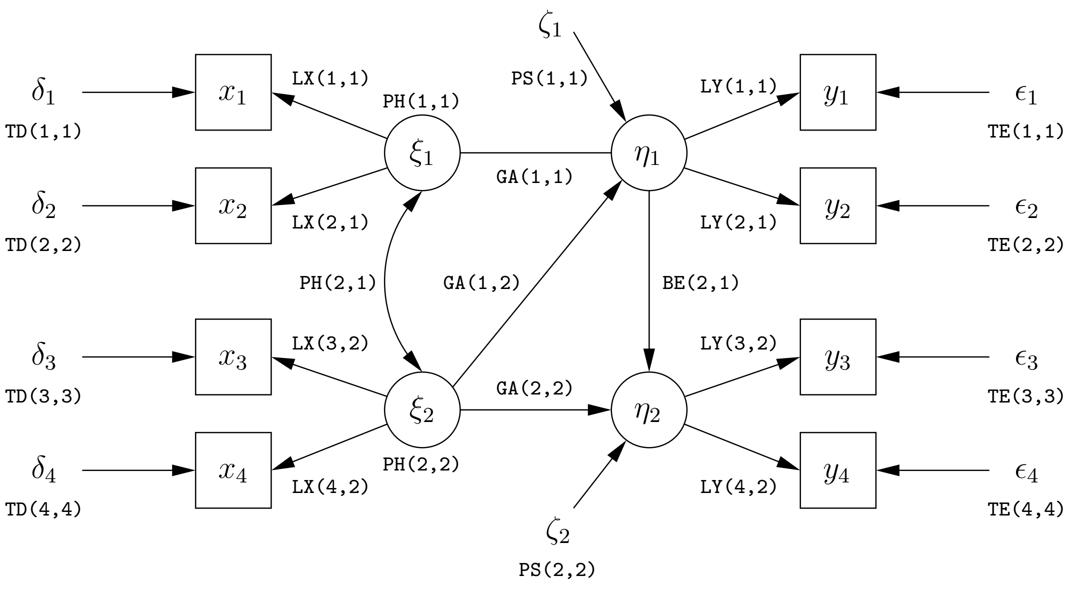

Abbildung 4. Beispiel-Pfaddiagramm des Strukturgleichungsmodells aus Abbildung 3. Die im Modell enthaltenen Parameter sind mit ihren LISREL-Bezeichnungen dargestellt.

4 Vollständiges Strukturgleichungsmodell: Parametermatrizen

Die Matrizen entsprechen dem Pfaddiagramm auf der vorherigen Seite.
Notation: links in griechischen Buchstaben, rechts in LISREL-Syntax

4.1 Meßmodell der ξ-Variablen (exogene Variablen)

Faktorladungsmatrix (Ladungen der Indikatorvariablen x auf den Konstrukten ξ)

$$\Lambda^x = \begin{pmatrix} \lambda^x_{11} = 1 & 0 \\ \lambda^x_{21} & 0 \\ 0 & \lambda^x_{32} = 1 \\ 0 & \lambda^x_{42} \end{pmatrix} \qquad \mathtt{LX} = \begin{pmatrix} \mathtt{LX}(1,1) = 1 & 0 \\ \mathtt{LX}(2,1) & 0 \\ 0 & \mathtt{LX}(3,2) = 1 \\ 0 & \mathtt{LX}(4,2) \end{pmatrix}$$

Fehler(ko)varianzmatrix (Varianzen und evtl. Kovarianzen der Meßfehlervariablen δ)

$$\Theta^\delta = \begin{pmatrix} \theta^\delta_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta^\delta_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta^\delta_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta^\delta_{44} \end{pmatrix} \qquad \mathtt{TD} = \begin{pmatrix} \mathtt{TD}(1,1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathtt{TD}(2,2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathtt{TD}(3,3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathtt{TD}(4,4) \end{pmatrix}$$

Faktor(ko)varianzmatrix (Varianzen und Kovarianzen der Faktoren ξ)

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathtt{PH} = \begin{pmatrix} \mathtt{PH}(1,1) & \mathtt{PH}(1,2) \\ \mathtt{PH}(2,1) & \mathtt{PH}(2,2) \end{pmatrix}$$

4.2 Meßmodell der η-Variablen (endogene Variablen)

Faktorladungsmatrix (Ladungen der Indikatorvariablen y auf den Konstrukten η)

$$\Lambda^y = \begin{pmatrix} \lambda^y_{11} = 1 & 0 \\ \lambda^y_{21} & 0 \\ 0 & \lambda^y_{32} = 1 \\ 0 & \lambda^y_{42} \end{pmatrix} \qquad \mathtt{LY} = \begin{pmatrix} \mathtt{LY}(1,1) = 1 & 0 \\ \mathtt{LY}(2,1) & 0 \\ 0 & \mathtt{LY}(3,2) = 1 \\ 0 & \mathtt{LY}(4,2) \end{pmatrix}$$

Fehler(ko)varianzmatrix (Varianzen und evtl. Kovarianzen der Meßfehlervariablen ϵ)

$$\Theta^\epsilon = \begin{pmatrix} \theta^\epsilon_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta^\epsilon_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta^\epsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta^\epsilon_{44} \end{pmatrix} \qquad \mathtt{TE} = \begin{pmatrix} \mathtt{TE}(1,1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathtt{TE}(2,2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathtt{TE}(3,3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathtt{TE}(4,4) \end{pmatrix}$$

4.3 Strukturmodell (Beziehungen zwischen ξ- und η-Variablen)

Effekte der ξ-Variablen auf die η-Variablen

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ 0 & \gamma_{22} \end{pmatrix} \qquad \texttt{GA} = \begin{pmatrix} \texttt{GA}(1,1) & \texttt{GA}(1,2) \\ 0 & \texttt{GA}(2,2) \end{pmatrix}$$

Effekte von η-Variablen auf andere η-Variablen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 \end{pmatrix} \qquad \texttt{BE} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \texttt{BE}(2,1) & 0 \end{pmatrix}$$

Residualvarianzen (Varianzen und evtl. Kovarianzen der Modellgleichungsfehlervariablen ζ)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 \\ 0 & \psi_{22} \end{pmatrix} \qquad \texttt{PS} = \begin{pmatrix} \texttt{PS}(1,1) & 0 \\ 0 & \texttt{PS}(2,2) \end{pmatrix}$$

5 Variablen: Bezeichnungen in LISREL

ksi	ξ_i	$(i = 1, \ldots, n)$	latente exogene (Prädiktor-) Variablen
eta	η_j	$(j = 1, \ldots, m)$	latente endogene (Kriteriums-/Mediator-) Variablen
zeta	ζ_j	$(j = 1, \ldots, m)$	Residualvariablen der latenten endogenen Variablen η_j bei Erklärung durch die latenten exogenen Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sowie die latenten endogenen Variablen $\eta_1, \ldots, \eta_{j-1}, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_m$
x	x_k	$(k = 1, \ldots, q)$	manifeste Indikatorvariablen der latenten exogenen Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$
y	y_l	$(l = 1, \ldots, p)$	manifeste Indikatorvariablen der latenten endogenen Variablen $\eta_1, \ldots, \eta_m$
delta	δ_k	$(k = 1, \ldots, q)$	Meßfehlervariablen der Indikatoren $x_1, \ldots, x_q$ der latenten exogenen Variablen
epsilon	ϵ_l	$(l = 1, \ldots, p)$	Meßfehlervariablen der Indikatoren $y_1, \ldots, y_p$ der latenten endogenen Variablen

6 Parametermatrizen: Bezeichnungen in LISREL

Matrix			Einträge		
GA	Γ	gamma	γ_{ji}	$(j = 1, \ldots, m;$ $i = 1, \ldots, n)$	Pfadkoeffizient des Effekts der latenten exogenen Variablen ξ_i auf die latente endogene Variable η_j
BE	B	beta	β_{ju}	$(j = 1, \ldots, m;$ $u = 1, \ldots, m;$ $j \neq u)$	Pfadkoeffizient des Effekts der latenten endogenen Variablen η_u auf die latente endogene Variable η_j
LX	Λ^x	lambda-x	λ^x_{ki}	$(k = 1, \ldots, q;$ $i = 1, \ldots, n)$	Pfadkoeffizient des Effekts der latenten exogenen Variable ξ_i auf ihre manifeste Indikatorvariable x_k (Faktorladung von x_k auf ξ_i)
LY	Λ^y	lambda-y	λ^y_{lj}	$(l = 1, \ldots, p;$ $j = 1, \ldots, m)$	Pfadkoeffizient des Effekts der latenten endogenen Variable η_j auf ihre manifeste Indikatorvariable y_l (Faktorladung von y_l auf η_j)
TD	Θ^δ	theta-delta	θ^δ_{kk}	$(k = 1, \ldots, q)$	Varianz der Meßfehlervariablen δ_k (Fehlervarianzanteil/nicht durch latente Variablen erklärbarer Varianzanteil der Indikatorvariable x_k; Element der Kovarianzmatrix Θ^δ aller Meßfehlervariablen δ_k; wenn Unkorreliertheit der Meßfehlervariablen vorausgesetzt wird, gilt $\theta^\delta_{sk} = 0$ für alle $s \neq k$)
TE	Θ^ϵ	theta-epsilon	θ^ϵ_{ll}	$(l = 1, \ldots, p)$	Varianz der Meßfehlervariablen ϵ_l (Fehlervarianzanteil/nicht durch latente Variablen erklärbarer Varianzanteil der Indikatorvariablen y_l; Element der Kovarianzmatrix Θ^ϵ aller Meßfehlervariablen ϵ_l; wenn Unkorreliertheit der Meßfehlervariablen vorausgesetzt wird, gilt $\theta^\epsilon_{rl} = 0$ für alle $r \neq l$)
PH	Φ	phi	φ_{ii}	$(i = 1, \ldots, n)$	Varianz der latenten exogenen Variablen ξ_i (Diagonal-Element der Kovarianzmatrix Φ aller latenten exogenen Variablen ξ_i)
			φ_{it}	$(i = 1, \ldots, n;$ $t = 1, \ldots, n;$ $i \neq t)$	Kovarianz der latenten exogenen Variablen ξ_i und ξ_t (Element der Kovarianzmatrix Φ aller latenten exogenen Variablen ξ_i, außerhalb der Diagonale)
PS	Ψ	psi	ψ_{jj}	$(j = 1, \ldots, m)$	Varianz der Residualvariablen ζ_j (nicht durch andere latente Variablen erklärbarer Varianzanteil der latenten endogenen Variablen η_j)